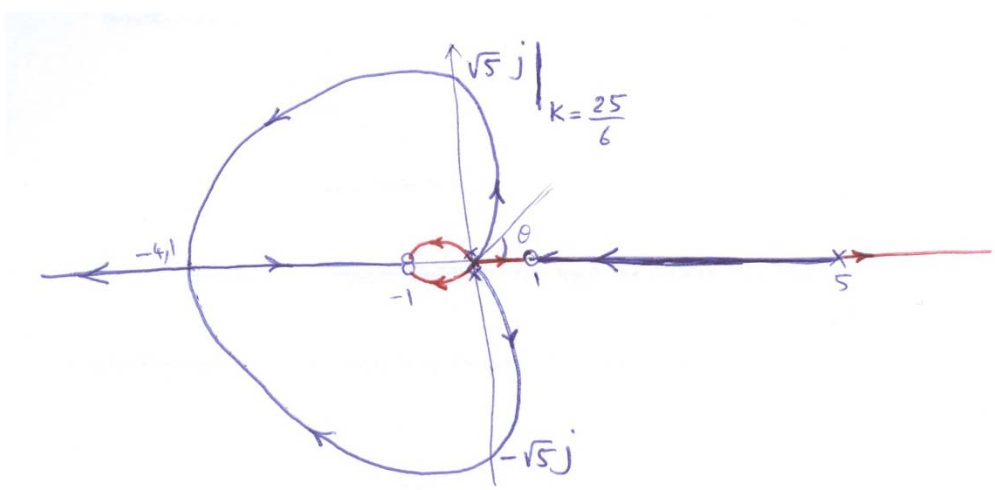
با نام او

حل آزمون درس کنترل خطی **تابستان ۸۸**

الف- مکان برای بهره‌های مثبت و منفی با دو رنگ متفاوت رسم شده‌اند. زاویهٔ خروج از قطبهای سه گانه در مبدأ، لازم است محاسبه گردد که برای آن داریم:

$$-3\theta-2\times 0+180-180=\begin{cases}\pm 180,\pm 540 & \Rightarrow \quad \theta=\mp 60,\mp 180\\ 0,\pm 360 & \Rightarrow \quad \theta=0,\mp 120\end{cases}$$

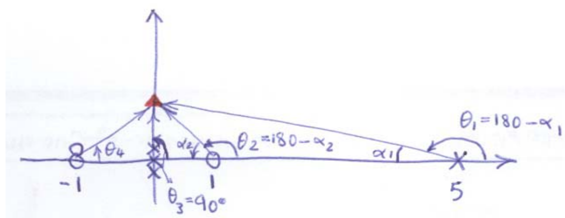
که حاصل‌ها در شکل رعایت شده است.



و حال داوری دربارهٔ تعداد قطبهای ناپایدار با توجه به شکل بدست آمده:

پر واضح است که بازای بهره‌های منفی همواره دو تا ناپایدار و دو تای دیگر پایدار خواهند بود. بازای بهره‌های مثبت تا جاییکه محور موهومی قطع گردد(این در ب و ج محاسبه می‌شود: $\frac{25}{6}$) سه تا ناپایدار و یکی پایدار است و پس از آن برعکس شده، یکی ناپایدار و سه تا پایدار خواهند بود.

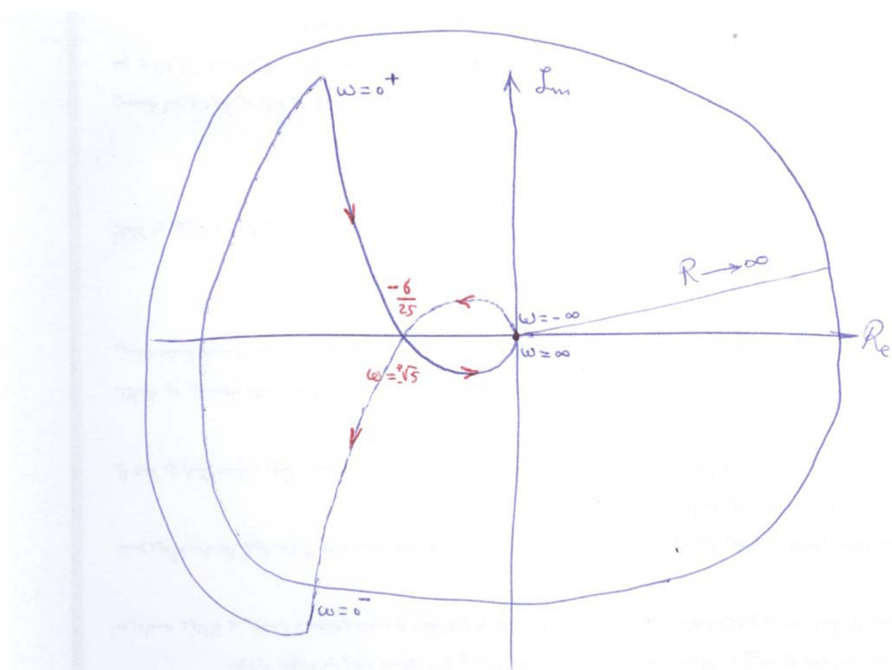
ب- با توجه به نمادهای نشان داده شده در شکل، فاز خواهد بود:



$$-\theta_1+\theta_2-3\theta_3+2\theta_4=-(180-\alpha_1)+(180-\alpha_2)-3(90)+2\theta_4=-270+2\theta_4+\alpha_1-\alpha_2$$
$$=-270+2\tan^{-1}\omega+\tan^{-1}\omega/5-\tan^{-1}\omega=-270+\tan^{-1}\omega/5+\tan^{-1}\omega$$

پر واضح است که فاز از -270 شروع و به -90 می‌رسد و روند افزایشی است. اندازه نیز از بی‌نهایت شروع و به صفر می‌رسد. لذا بسادگی شکل رسم شده بدست می‌آید و در جایی فاز به -180 رسیده و یا محور حقیقیِ منفی قطع خواهد شد. فرکانسِ مربوطه: $\omega=\pm\sqrt{5}$ $\Rightarrow$ $\frac{\omega+\omega/5}{1-\omega^2/5}=\infty$ $\Rightarrow$ $\tan^{-1}\omega+\tan^{-1}\omega/5=90$ و از روی آن، اندازه نیز بسادگی بدست می‌آید: $\left.\frac{\left(\sqrt{\omega^2+1}\right)^3}{\omega^3\sqrt{\omega^2+25}}\right|_{\omega=\pm\sqrt{5}}=\frac{6}{25}$.

بدلیلِ نیم دور حولِ سه قطب در مبدأ خلاف ساعتگرد(یک و نیم دور)، یک و نیم دورِ ساعتگرد از 0^- به 0^+ باید پیموده شود و البته با اندازهٔ بی‌نهایت! که حاصل در شکل دیده می‌شود.



نتیجه‌گیری : برای $-\frac{1}{k}$ از $-\infty$ تا $-\frac{6}{25}$ یعنی بهره از صفر تا $\frac{25}{6}$ تعداد دورها ۲ تا بوده و چون حلقه‌باز نیز یک قطب ناپایدار داشته، لذا حلقه‌بسته، سه تا ناپایدار خواهد داشت. برای $-\frac{1}{k}$ از 0 تا $-\frac{6}{25}$ یعنی بهره از $\frac{25}{6}$ تا ∞ ، صفر دور است که باز چون حلقه‌باز یک قطب ناپایدار داشته، لذا حلقه بسته یکی ناپایدار خواهد داشت. و اما برای $-\frac{1}{k}$ از 0 تا ∞ یعنی بهره از $-\infty$ تا 0 نیز همواره یک دور ساعتگرد داریم که با وجود یک ناپایدار در حلقه‌باز، در حلقه بسته دو ناپایدار نتیجه خواهد شد.

ج- مخرج تابع تبدیلِ حلقه بسته با بهرهٔ دلخواه k را بدست آورده و جدول روث-هرویتز را تشکیل می‌دهیم:

$$1+k\frac{(s^2-1)(s+1)}{s^3(s-5)}=0 \quad\Rightarrow\quad s^4+(k-5)s^3+ks^2-ks-k=0$$

$$\left.\begin{array}{llll} s^4 & 1 & k & -k \\ s^3 & k-5 & -k & 0 \\ s^2 & \frac{k^2-4k}{k-5} & -k & \\ s^1 & \frac{25-6k}{k-4} & 0 & \\ s^0 & -k & & \end{array}\right\}\rightarrow$$

	$-\infty$ … 0	0 … 4	4 … $25/6$	$25/6$ … 5	5 …
k	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$k-5$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{k^2-4k}{k-5}$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\frac{25-6k}{k-4}$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$
$-k$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$
number of unstable poles	2	3	3	1	1

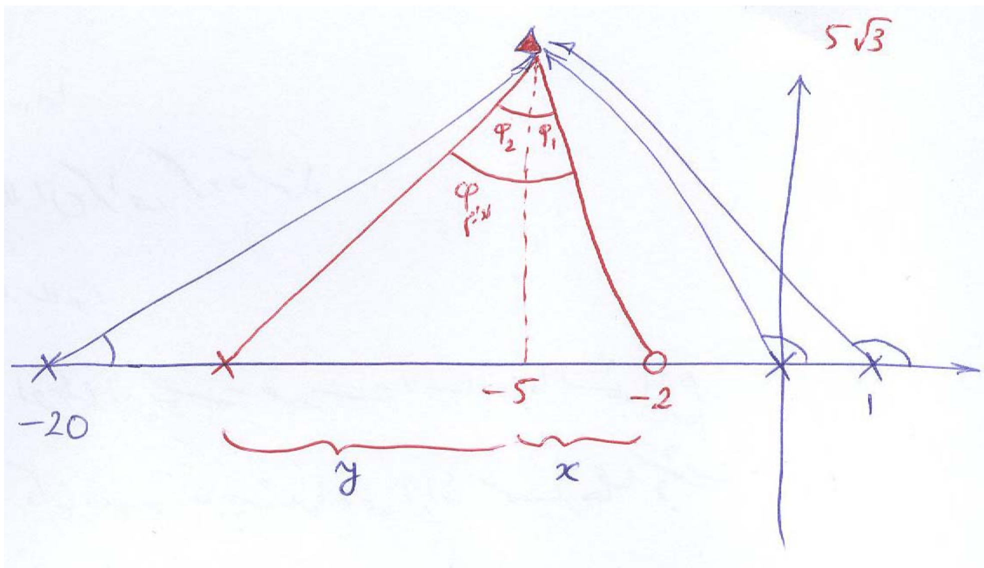
توجه کنید که در ردیف آخر تعداد قطبهای ناپایدار، با توجه به تعداد تغییر علامتها، داده شده‌اند. ضمناً می‌توان دید که بازای $\frac{25}{6}$ همهٔ ردیف ۴ صفر شده و لذا ریشه‌های ردیف بالایش یعنی ردیف۳ ، جزو ریشه‌ها هستند که همان ریشه‌های موهومیِ $\pm j\sqrt{5}$ را می‌دهد.

۲- الف- ثابت زمانی و فراجهش داده شده با محاسبات زیر جای قطبهای مطلوب را مشخص می‌کند:

$$\left.\begin{array}{l} -\alpha=-\frac{1}{0.2}=-5 \\ e^{-\pi\frac{\alpha}{\beta}}=0.163 \quad\Rightarrow\quad \beta=5\sqrt{3}=8.66 \end{array}\right\}-5\pm j5\sqrt{3}$$

شکل زیر را در نظر گرفته و اضافه زاویهٔ لازم برای این منظور بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\varphi_{\text{لازم}}+\varphi_{\text{کنونی}}=-180\rightarrow\quad \varphi_{\text{لازم}}=-180-\left(-120-\tan^{-1}\frac{5\sqrt{3}}{15}-\left(180-\tan^{-1}\frac{5\sqrt{3}}{6}\right)\right)=-95$$



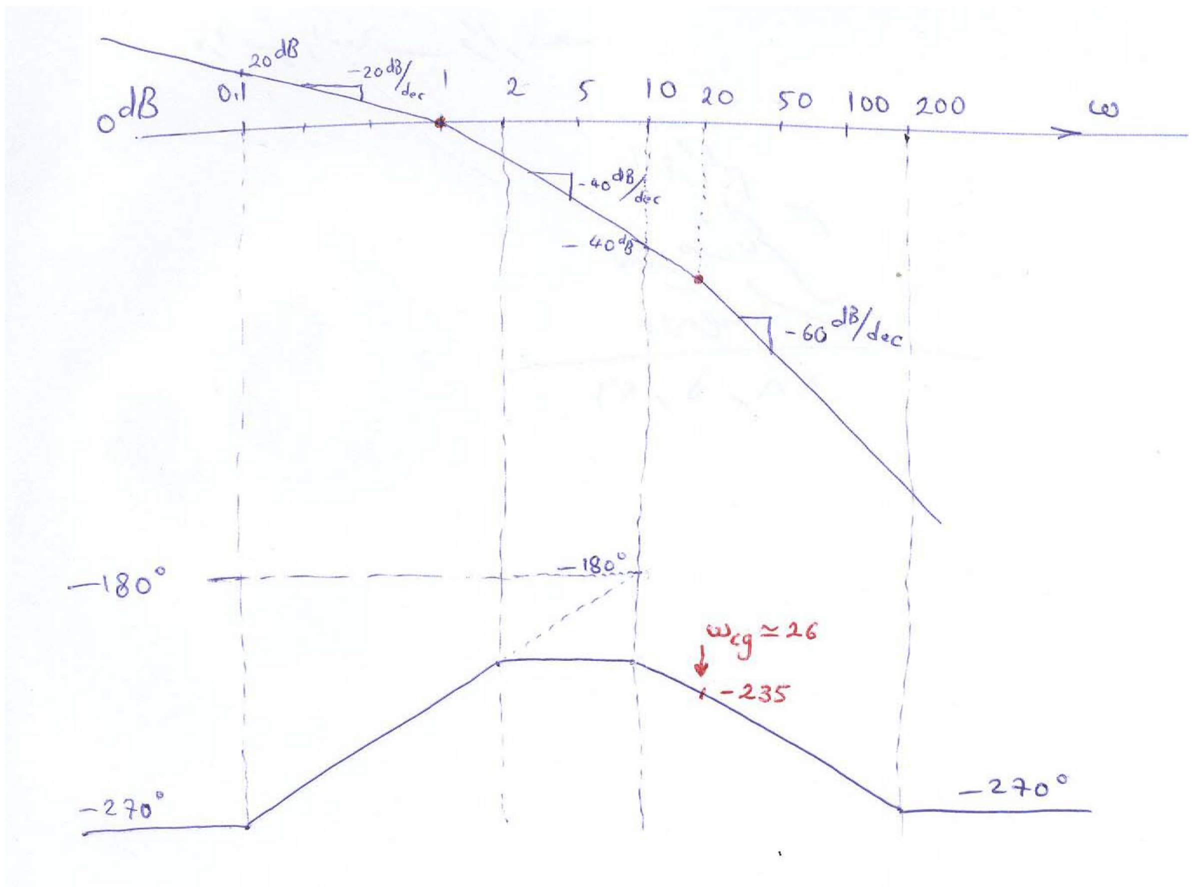
همانگونه که می‌دانید با طراحی یک پیشفاز(شبکهٔ سرعتی) می‌توان به جواب رسید و برای مکان صفر و قطب آن نیز گزینه‌های بسیاری است. البته روشن است که صفر را نمی‌توان زیر قطبهای مطلوب قرار داد چون در این صورت حداکثر زاویه ۹۰ درجه است که کافی نیست. اما می‌دانیم که صفر را هم نباید خیلی نزدیک مبدأ آورد و لذا مثلاً در ۲- می‌توان قرار داد. از روی آن φ_1 و سپس با توجه به $\varphi_{لازم}$ ، φ_2 نیز بدست می‌آید. پس از آن همانگونه که در ادامه می‌آید بهرهٔ لازم برای جبرانساز نیز بدست آورده می‌شود:

$$\varphi_1 = \tan^{-1}\tfrac{x=3}{5\sqrt{3}} = 19.1 \rightarrow \quad \varphi_2 = 95-19 = 76 \rightarrow \quad y = 5\sqrt{3}\tan 76 = 34 \rightarrow \quad k\,\tfrac{s+2}{s+39}$$
$$k_{کل} = \sqrt{\tfrac{(25+75)(36+75)(125+75)(34^2+75)}{(9+75)}} = 5703 \rightarrow \quad k = \tfrac{k_{کل}}{20} = 285$$

ب- بهرهٔ ثابت کل حلقه‌باز $\tfrac{285\times 2}{39}\times(-1) = -14.6$ بدست می‌آید و لذا خطای مانا به ورودی پله بدلیل وجود یک انتگرالگیر خالص در حلقه باز، صفر و به ورودی شیب $\tfrac{1}{-14.6} = -0.07$ و به سهمی، فزاینده با زمان با شیب -0.07 .

ج- کافی است جبرانساز پسفازی با بهرهٔ ثابت ۱۰ و بهرهٔ مکانِ ۱ استفاده کنیم. صفر جبرانساز را نیز ۵ برابر کوچکتر از مقدار حقیقیِ قطبهای مطلوب طراحی شدهٔ قبلی می‌گیریم: $\tfrac{s+1}{s+0.1}$

۳- از نمایش بود پیداست که هر قدر بتوان فاز بیشتری اضافه نمود می‌توان به فرکانس گذر بالاتر و لذا پهنای باند بیشتر و لذا سرعت بالاتر دست یافت. می‌دانیم که پیشفاز نیز حداکثر ۸۵-۹۰ درجه می‌تواند فاز بدهد و این هنگامی است که تبدیل به یک PDی خالص شده باشد یعنی قطب ندارد. پس همین را در نظر گرفته و جاییرا پیدا می‌کنیم که فاز حدود ۵۵ درجه زیر ۱۸۰- باشد که با حدود ۸۵ درجه جبران به همان حدفاز خواسته شدهٔ ۳۰ برسیم:



$$-270+\tan^{-1}\omega-\tan^{-1}\omega/20=-235 \rightarrow \quad \omega=26$$

با توجه به فازِ PDیِ خالص ، صفرِ آن باید حدود یکدهمِ این فرکانس قرار داده شود تا در این فرکانس فازِ ۸۵ اضافه شود. پس جبرانساز خواهد شد: k(s+۲.۶) و k نیز از اینکه در این فرکانس باید اندازهٔ کلِ حلقه‌باز ۱ گردد براحتی بدست می‌آید:

$$\left|k(s+2.6)\tfrac{20}{s(s-1)(s+20)}\right|_{\omega=2.6}=1 \rightarrow \quad k=42.5$$